ΥΛΙΚΑ Ι

ΠΑΡΟΝ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Άδειες Χρήσης

Θερμική Διάδοση
συμπληρωματικό υλικό

Η γενική εξίσωση θερμικής διάχυσης για ένα ομογενές υλικό δίνεται από την σχέση:

$$\frac{\partial T(\mathbf{r},t)}{\partial t} = a \cdot \nabla^2 T(\mathbf{r},t)$$

T(***r***, *t*): θερμοκρασία (Kelvin)

α : συντελεστής θερμικής διάχυσης (m^2/s)

$$a = \frac{k}{\rho \cdot c_p}$$

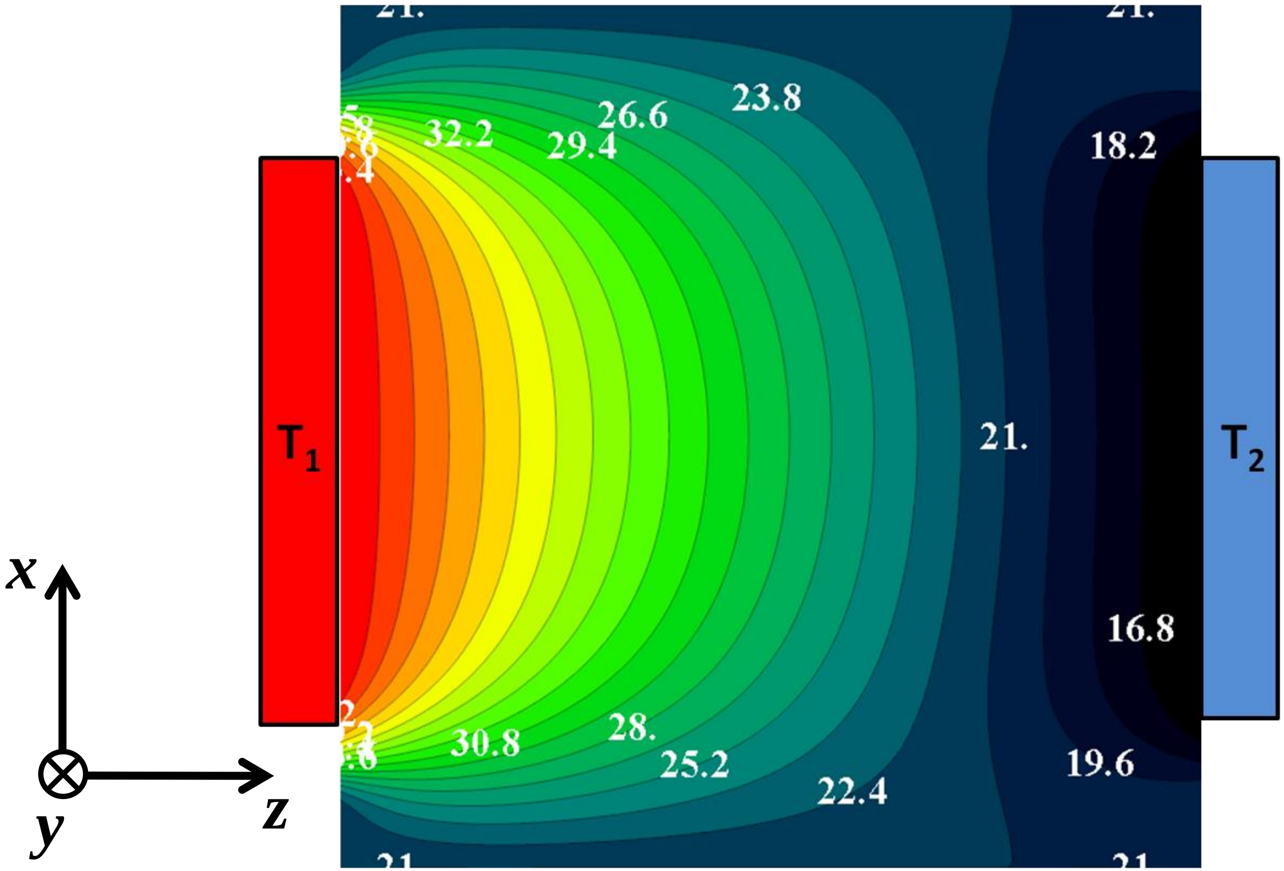
k: θερμική αγωγιμότητα (W m^{-1} K^{-1})

ρ: πυκνότητα (Kg/cm^3)

c_p: ειδική θερμοχωρητικότητα (υπό σταθερή πίεση) (J Kg^{-1} K^{-1})

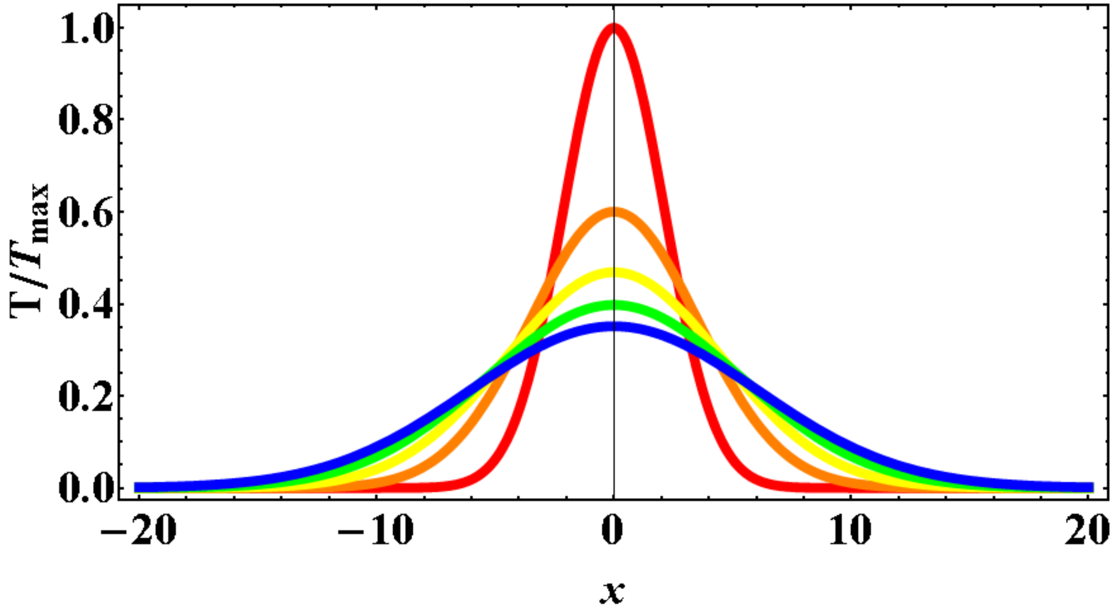
Παράδειγμα: Σταθερή κατάσταση, υλικό ανάμεσα σε δεξαμενές θερμότητας

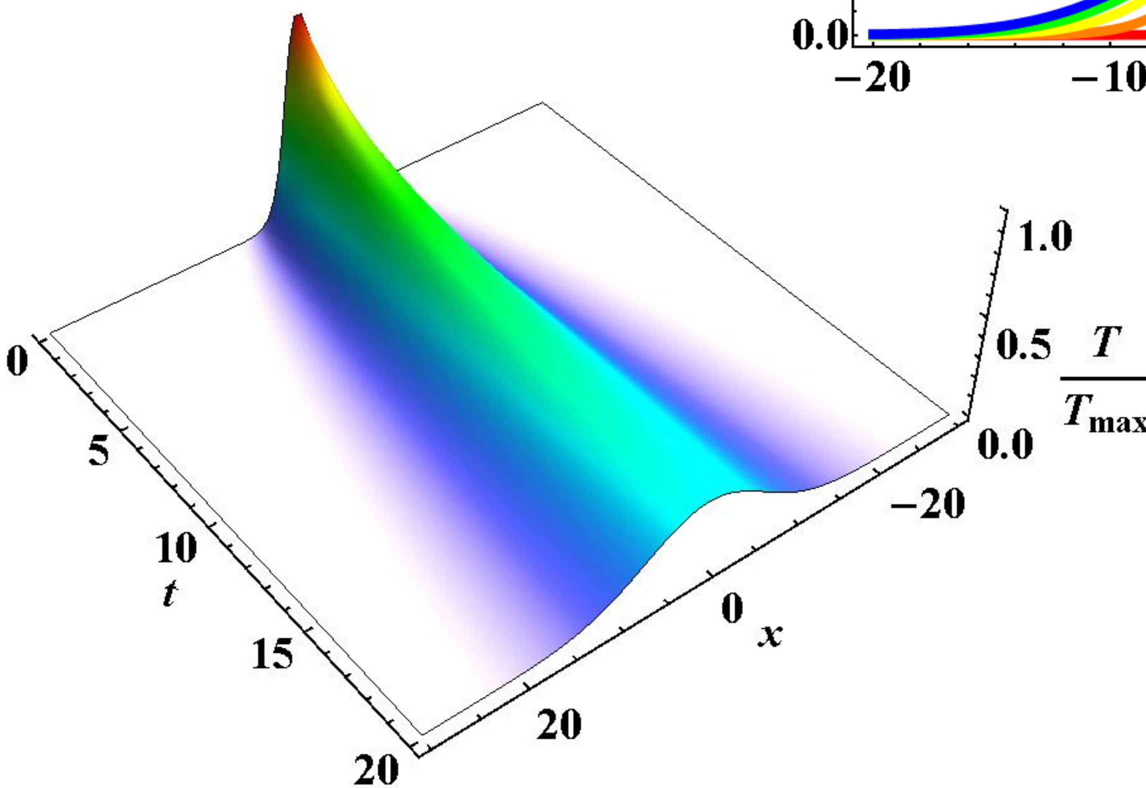
$$\frac{\partial T(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0 \Rightarrow \nabla^2 T(\mathbf{r},t)=0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 T(x,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(x,z)}{\partial z^2}=0}$$

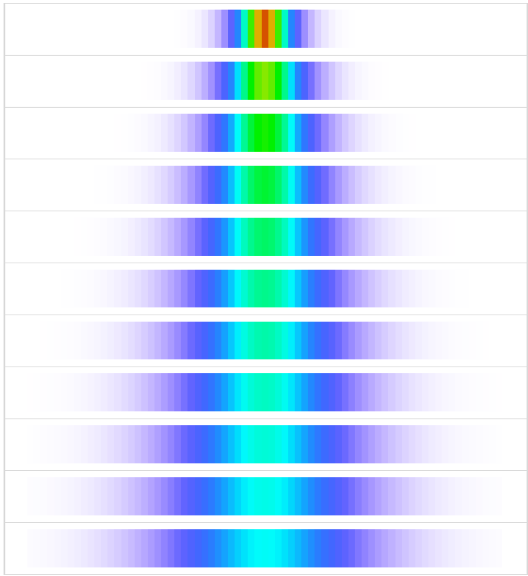


Παράδειγμα: Θερμική διάχυση σε μία διάσταση

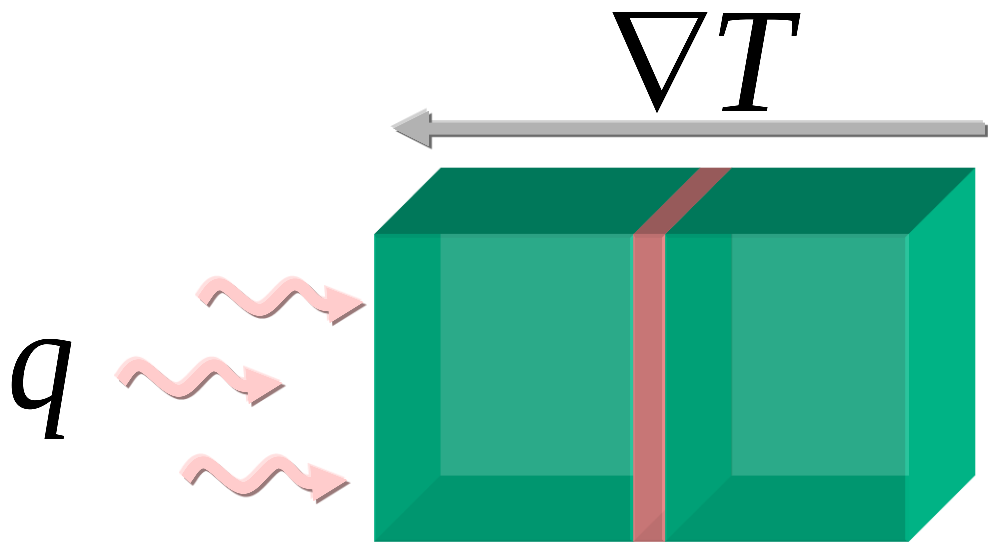
$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$







Εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας (ή αλλιώς νόμος του Fourier):



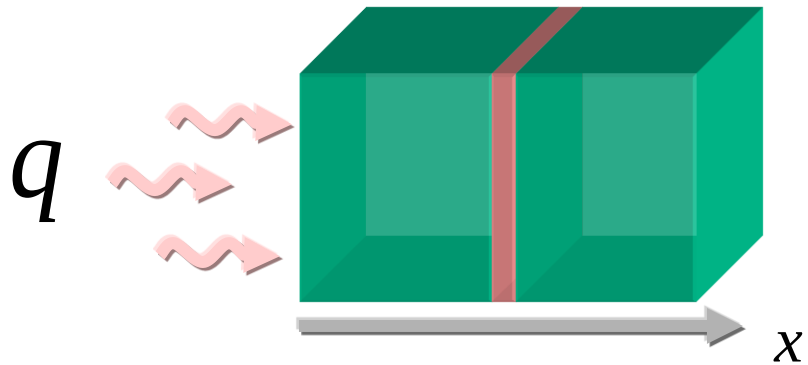
$$q = -k \cdot \nabla T(\mathbf{r}, t)$$

T(***r***, *t*): θερμοκρασία (Kelvin)

q: τοπική ροή θερμότητας (W/m^2)

k: θερμική αγωγιμότητα ($W\ m^{-1}\ K^{-1}$)

Θεωρώντας μια μονοδιάστατη περίπτωση και ότι βρισκόμαστε σε σταθερή κατάσταση (τα μεγέθη δεν εξαρτώνται από τον χρόνο) η εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας απλοποιείται



$$q = -k \cdot \frac{dT(x)}{dx}$$

T(x): θερμοκρασία (Kelvin)

q: τοπική ροή θερμότητας (W/m^2)

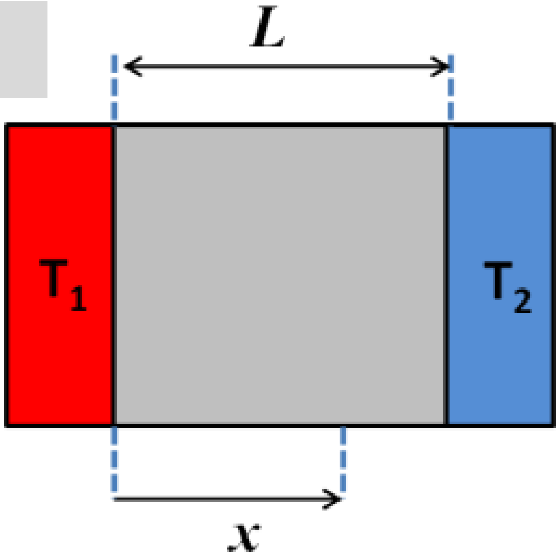
k: θερμική αγωγιμότητα ($W\ m^{-1}\ K^{-1}$)

Παραδείγματα

Υλικό ανάμεσα σε δεξαμενές θερμότητας

Υλικό πάχους *L* χωρίζει δύο δεξαμενές θερμότητας με θερμοκρασία T_1 και T_2 αντίστοιχα.

Πώς θα μεταβάλλεται η θερμοκρασία στο υλικό;
Ποιά θα είναι η ροή θερμότητας;



Εφαρμόζοντας την εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας σε μία διάσταση μπορούμε να καταλήξουμε σε μια αναλυτική σχέση για την θερμοκρασία:

$$\frac{dT(x)}{dx} = -\frac{q}{k} = const \Rightarrow T(x) = -\int \frac{q}{k}\,dx = -\frac{q}{k}x + C$$

Η ροή θερμότητας ***q*** και η σταθερά ***C*** είναι άγνωστοι και θα υπολογιστούν αξιοποιώντας τις οριακές συνθήκες του προβλήματος.

Στα όρια του υλικού (x = 0 και x = L) γνωρίζουμε ότι:

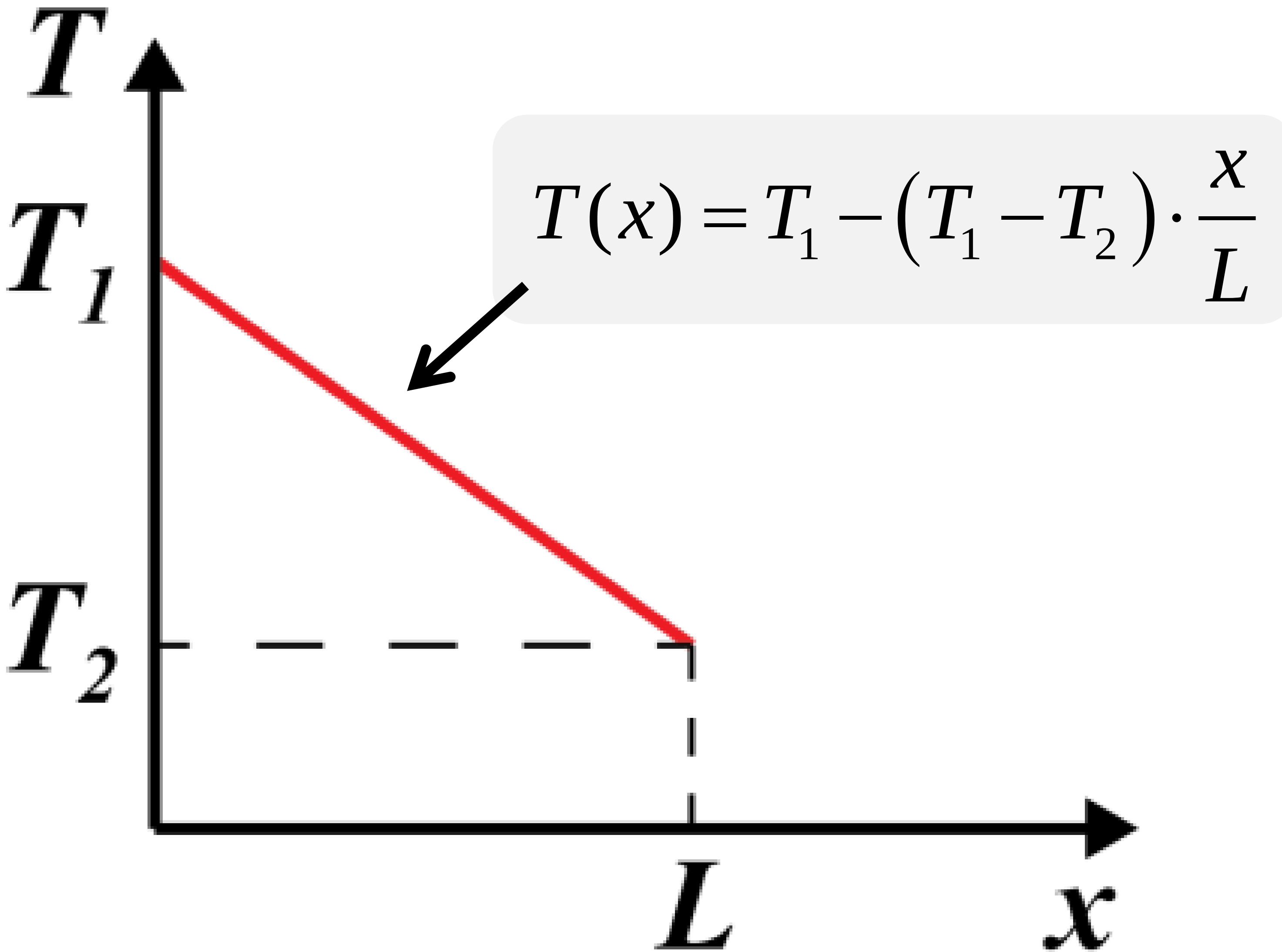
$$T(0) = T_1, \qquad T(L) = T_2$$

συνδυάζοντας τις οριακές συνθήκες με την προηγούμενη αναλυτική σχέση:

$$\left.\begin{aligned} T(0) = C = T_1 \\ T(L) = -\frac{q}{k}L + T_1 = T_2 \Rightarrow q = \frac{T_1 - T_2}{L}k \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$T(x) = T_1 - \left(T_1 - T_2\right) \cdot \frac{x}{L}$$

Γραμμική συνάρτηση της απόστασης!


T
T_1
T_2
L
x
$T(x) = T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{x}{L}$

Η ροή θερμότητας $\boldsymbol{q}$ μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{L} k$$

ανάλογη της θερμικής αγωγιμότητας του υλικού

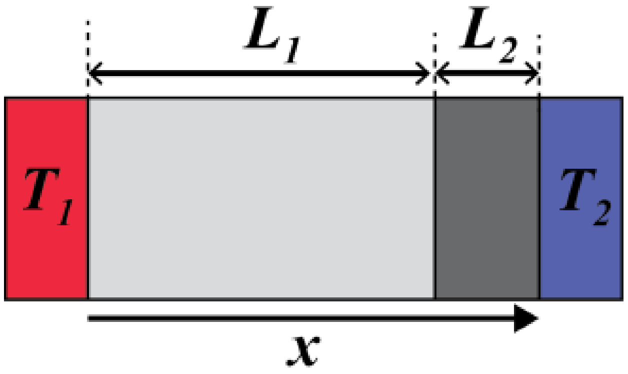
για τυπικές τιμές T_1 = 298 K (25 °C), T_2 = 283 K (10 °C), και πάχος L = 20 cm για διάφορα τυπικά υλικά παίρνουμε:

Υλικό	Θερμική αγωγιμότητα k ($W\ m^{-1}\ K^{-1}$)	Ροή θερμότητας q (W/m^2)
Αέρας	0.025	1.87
Χαρτί	0.05	3.75
Φελλός	0.06	4.5
Ξύλο	0.12	9
Νερό	0.6	45
Γυαλί	0.93	69.75
Μπετόν	1.28	96
Μπρούτζος	50	3750

Αλληλουχία υλικών ανάμεσα σε δεξαμενές θερμότητας

Αλληλουχία δύο διαφορετικών υλικών πάχους L_1, L_2 χωρίζει δύο δεξαμενές θερμότητας με θερμοκρασία T_1 και T_2 αντίστοιχα.

Πώς θα μεταβάλλεται η θερμοκρασία στο υλικό; Ποιά θα είναι η ροή θερμότητας;



Εφαρμόζοντας την εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας σε μία διάσταση για κάθε υλικό ξεχωριστά μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων που περιγράφουν αναλυτικά την θερμοκρασία :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT(x)}{dx} &= -\frac{q}{k_1} = const, \quad (0 \le x \le L_1) \\ \frac{dT(x)}{dx} &= -\frac{q}{k_2} = const, \quad (L_1 \le x \le L_1 + L_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow T(x) = \begin{cases} -\dfrac{q}{k_1}x + C_1, & (0 \le x \le L_1) \\ -\dfrac{q}{k_2}x + C_2, & (L_1 \le x \le L_1 + L_2) \end{cases}$$

Η ροή θερμότητας $\boldsymbol{q}$ και η σταθερές $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{C_2}$ είναι άγνωστοι και θα υπολογιστούν αξιοποιώντας τις οριακές συνθήκες του προβλήματος.

Στα όρια του υλικού ($x = 0$, $x = L_1$, $x=L_1+L_2$) γνωρίζουμε ότι:

$(i) \quad x = 0,$

$$T(0) = -\frac{q}{k_1}\cdot 0 + C_1 \equiv T_1$$

$(ii) \quad x = L_1,$

$$-\frac{q}{k_1}L_1 + C_1 \equiv -\frac{q}{k_2}L_1 + C_2$$

$(iii) \quad x = L_1 + L_2,$

$$T(L_1 + L_2) = -\frac{q}{k_2}\left(L_1 + L_2\right) + C_2 \equiv T_2$$

συνδυάζοντας τις οριακές συνθήκες με τις προηγούμενες αναλυτικές σχέσεις:

$$(i)\quad \boxed{C_1 = T_1,}$$

$$(ii),(iii) \Rightarrow \left(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}\right)L_1 q - \frac{q}{k_2}\left(L_1+L_2\right)+T_1 = T_2 \Rightarrow T_1 - T_2 = \left(\frac{L_1}{k_1}+\frac{L_2}{k_2}\right)q \Rightarrow$$

$$\boxed{q = \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{L_1}{k_1}+\frac{L_2}{k_2}\right)} \equiv \frac{\Delta T}{L} k_{eff},}$$

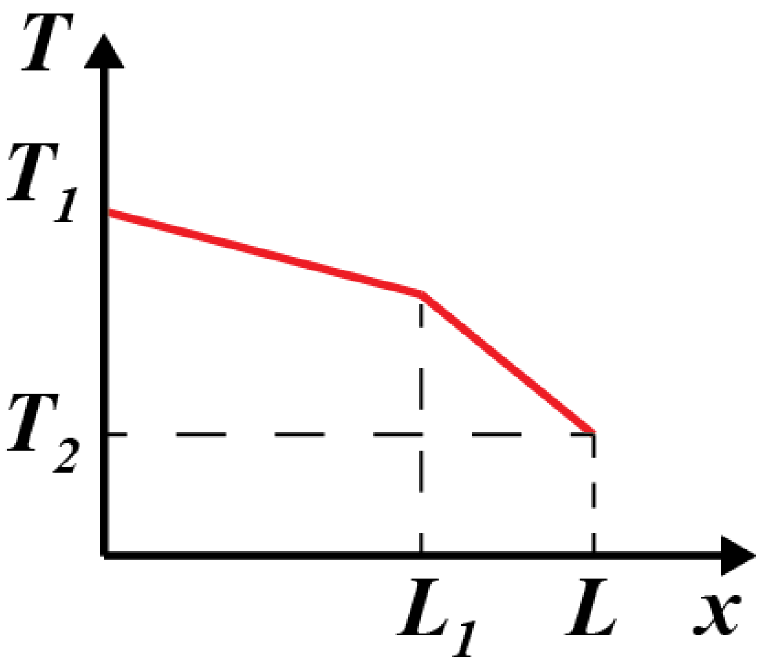
$$(iii) \Rightarrow -\frac{1}{k_2}\frac{\Delta T}{L} k_{eff} L + C_2 = T_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = T_2 + \frac{k_{eff}}{k_2}\Delta T}$$

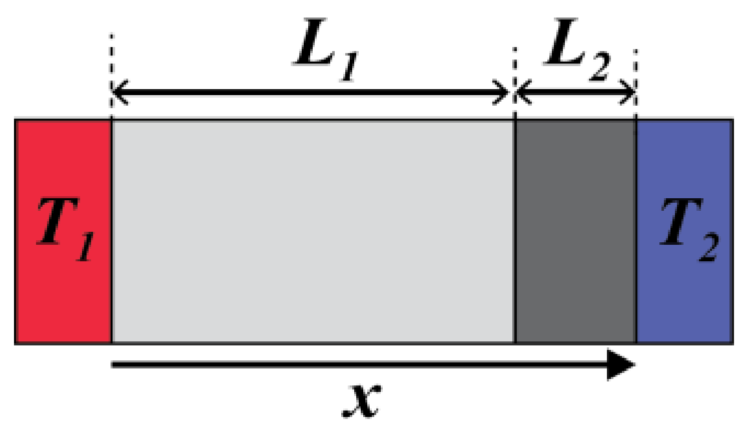
$$\boxed{\frac{1}{k_{eff}} \equiv \frac{L_1}{L}\frac{1}{k_1} + \frac{L_2}{L}\frac{1}{k_2},\ L = L_1 + L_2,\ \ \Delta T = T_1 - T_2}$$

Έτσι τελικά καταλήγουμε στην:

Γραμμική συνάρτηση της απόστασης!

$$T(x)=\begin{cases} -\dfrac{k_{eff}}{k_1}\Delta T\,\dfrac{x}{L}+T_1, & (0\le x\le L_1) \\ \dfrac{k_{eff}}{k_2}\Delta T\left(1-\dfrac{x}{L}\right)+T_2, & (L_1\le x\le L) \end{cases}$$





Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να διαχωριστούμε τα δύο επάλληλα υλικά ως ένα «ενεργό» υλικό με θερμική αγωγιμότητα :

$$\frac{1}{k_{eff}} \equiv \frac{L_1}{L}\frac{1}{k_1} + \frac{L_2}{L}\frac{1}{k_2}$$

Έτσι η ροή θερμότητας ***q*** μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση:

$$q = \frac{\Delta T}{L} k_{eff}$$

ανάλογη της ενεργής θερμικής αγωγιμότητας του σύνθετου υλικού

$$a \equiv \frac{L_1}{L} \Rightarrow \frac{L_2}{L} = (1-a) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{a}{k_1} + \frac{(1-a)}{k_2} \Leftrightarrow k_{eff} = \frac{k_1 \cdot k_2}{(1-a)\cdot k_1 + a \cdot k_2}$$

Επαλληλία θερμο-αγώγιμου με θερμο-μονωτικό:

$$k_1 \gg k_2 \Rightarrow \frac{1}{k_{eff}} = \frac{1}{k_2}[a\frac{k_2}{k_1} + (1-a)] \Rightarrow$$

Συμπεριφορά θερμο-μονωτικού

$$\frac{1}{k_{eff}} \cong \frac{(1-a)}{k_2} \Leftrightarrow k_{eff} = \frac{k_2}{(1-a)}$$