ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών

Υλικά Ι

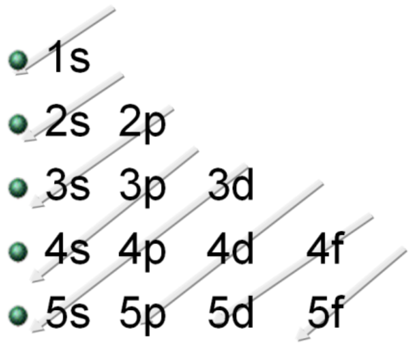
Ασκήσεις

Δημήτρης Παπάζογλου
Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών

Ενότητα 3:Ατομική δομή – Ηλεκτρονική διαμόρφωση

Υποδείξεις

Πλήρωση ηλεκτρονικών στοιβάδων: Οι στιβάδες και τροχιακά χαμηλότερης ενέργειας συμπληρώνονται πρώτα!

Γενικοί κανόνες	Διαμορφώσεις
 (Μνημονικό διάγραμμα)	1. **Ευγενών αερίων:** *Τα **s**, **p** τροχιακά της εξωτερικής στοιβάδας είναι συμπληρωμένα, ενώ τα τροχιακά όλων των μικρότερων στοιβάδων είναι συμπληρωμένα* 2. **Συμπληρωμένα d τροχιακά:** *Συμπληρωμένα τα **d** τροχιακά ενώ τα **s**, **p** τροχιακά της αμέσως επόμενης στοιβάδας είναι κενά* 3. **Ημισυμπληρωμένα d ή p τροχιακά:** *5 ηλεκτρόνια σε **d** τροχιακά ή 3 ηλεκτρόνια σε **p** τροχιακά* 4. **Συμπληρωμένα s τροχιακά:** Συμπληρωμένο το τροχιακό ***s***

Ασκήσεις

3.1 Να γράψετε αναλυτικά την ηλεκτρονική δομή των ατόμων: $_{29}$Cu , $_{11}$Na, $_{35}$Br, $_{6}$C, $_{28}$Ni, $_{14}$Si, $_{32}$Ge, $_{19}$K

Λύση (ενδεικτική):

Χρησιμοποιώντας τον συνολικό αριθμό ηλεκτρονίων και κατανέμουμε στις αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες αξιοποιώντας το μνημονικό διάγραμμα, λαμβάνοντας υπόψη και τις διορθώσεις που προκύπτουν από τις ειδικές διαμορφώσεις .

$_{29}$Cu: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1$

Σχόλιο: ¨έχουμε ηλεκτρονική διαμόρφωση …$3d^{10}4s^1$ αντί του $3d^9 4s^2$ γιατί η διαμόρφωση με συμπληρωμένα τα d τροχιακά έχει χαμηλότερη ενέργεια.

$_{11}$Na: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$

$_{35}$Br: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^5$

3.2 Διορθώστε τα τυχόν λάθη στις ηλεκτρονικές δομές:

1) $1s^3\ 2s^2\ 2p^8\ 3s^5\ 3p^2\ 3d^9$
2) $1s^2\ 2s^1\ 2p^8\ 3s^3\ 3p^5\ 3d^5\ 4s^2$
3) $1s^2\ 2s^3\ 2p^2\ 3s^2\ 3p^7\ 3d^4\ 4s^1\ 4p^3$
4) $1s^2\ 2s^3\ 2p^8$
5) $1s^1\ 2s^3\ 2p^7$
6) $1s^2\ 2s^2\ 2p^4\ 3s^2\ 3p^4\ 3d^7\ 4s^2$
7) $1s^2\ 2s^1\ 2p^2\ 3s^2\ 3p^7\ 3d^8\ 4s^3\ 4p^4$
8) $1s^2\ 2s^1\ 2p^5\ 3s^3\ 3p^2\ 3d^9$
9) $1s^1\ 2s^3\ 2p^7\ 3p^3$
10) $1s^2\ 2s^1\ 2p^7\ 3s^1\ 3p^2\ 3d^7\ 3f^2$
11) $1s^2\ 2s^3\ 2p^1\ 3s^2\ 3p^7\ 3d^8\ 4s^3\ 4f^4$
12) $1s^2\ 2s^1\ 2p^5\ 3s^3\ 3p^2\ 3d^{12}$

Λύση:

Υπολογίζουμε τον συνολικό αριθμό ηλεκτρονίων και τον κατανέμουμε στις αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες.

1) *(29 ηλ.)* $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^1$
2) *(26 ηλ.)* $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^6\ 4s^2$
3) *(24 ηλ.)* $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^5\ 4s^1$
4) *(13 ηλ.)* $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^1$
5) *(11 ηλ.)* $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^1$
6) *(23 ηλ.)* $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^3\ 4s^2$
7) *(29 ηλ.)* $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^1$
8) *(22 ηλ.)* $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^2\ 4s^2$
9) *(14 ηλ.)* $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^2$
10) *(14 ηλ.)* $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^2$
11) *(30 ηλ.)* $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^2$
12) *(25 ηλ.)* $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^5\ 4s^2$

3.3 Ποιο από τα παρακάτω άτομα είναι μέταλλο και γιατί;
i) $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^1$,
ii) $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^1$,
iii) $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6$

Λύση:

i) **$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^1$:**
1e στην εξωτερική στοιβάδα (3s), ανήκει στην ομάδα ΙΑ ⇒ **μέταλλο** γιατί αποβάλλοντας 1 e το ιόν αποκτά σταθερή ηλεκτρονιακή διαμόρφωση (8 e στην εξωτερική στοιβάδα)

ii) **$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^1$:**
3e στην εξωτερική στοιβάδα ($3s^2\ 3p^1$), ανήκει στην ομάδα ΙΙΙΑ ⇒ **μέταλλο** γιατί αποβάλλοντας 1 e το ιόν αποκτά σχετικά σταθερή ηλεκτρονιακή διαμόρφωση (3s πλήρως συμπληρωμένη) ενώ αποβάλλοντας 3 e το ιόν αποκτά σταθερή ηλεκτρονιακή διαμόρφωση (8 e στην εξωτερική στοιβάδα)

iii) **$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6$:**
8e στην εξωτερική στοιβάδα ($3s^2\ 3p^6$), **ευγενές αέριο**

Τέλος Ασκήσεων Ενότητας 3

Ενότητα 4:Δεσμοί

4.1 Τι είδη δεσμών συναντάμε στα υλικά: Πυρίτιο, Αλουμίνιο, γυαλί, νερό, διαμάντι, πάγος, NaCl, γραφίτης και PMMA;

Λύση

Πυρίτιο: ομοιοπολικός, **Αλουμίνιο:** μεταλλικός, **γυαλί:** ομοιοπολικός , **νερό:** ομοιοπολικός και υδρογόνου **διαμάντι:** ομοιοπολικός, **πάγος:** ομοιοπολικός & υδρογόνου, **NaCl:** ιοντικός, **γραφίτης:** ομοιοπολικός & Van der Waals, **PMMA:** ομοιοπολικός

4.2 Έστω ότι η δυναμική ενέργεια ενός δεσμού δίνεται από την σχέση $U(r) = -\frac{10}{r^3} + \frac{6}{r^4}$ σε μονάδες *eV* όταν η ακτίνα *r* εκφράζεται σε *nm*.

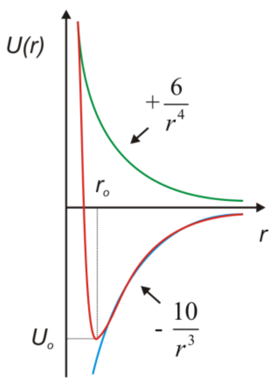
α) Να σχεδιάσετε ποιοτικά το δυναμικό U(*r*) και να εκφράσετε αναλυτικά την συνολική δύναμη συναρτήσει της ακτίνας *r* προσδιορίζοντας ποιος όρος αναφέρεται στις ελκτικές και ποιος στις απωστικές δυνάμεις. Μπορεί το δυναμικό αυτό να περιγράφει ένα ιοντικό δεσμό; *(δικαιολογήστε την απάντηση σας)* **β)** Ποια θα είναι η απόσταση ισορροπίας ανάμεσα στα δύο ιόντα και ποια η αντίστοιχη ενέργεια αλληλεπίδρασης;

Λύση:

α) Η συνολική δύναμη δίνεται από την σχέση:

$$F_{tot}(r) \equiv \frac{dU(r)}{dr} = \frac{3 \cdot 10}{r^4} - \frac{4 \cdot 6}{r^5} = \frac{30}{r^4} - \frac{24}{r^5},$$

Είναι φανερό ότι οι ελκτικές δυνάμεις περιγράφονται από τον όρο $\frac{30}{r^4}$ ενώ οι απωστικές από τον όρο $-\frac{24}{r^5}$. Εφόσον οι ελκτικές δυνάμεις δεν είναι της μορφής $\frac{A}{r^2}$ το δυναμικό $U(r)$ **δεν** περιγράφει ιοντικό δεσμό.



Ο όρος $-\frac{10}{r^3}$ αντιστοιχεί σε ελκτικές δυνάμεις, ενώ ο όρος $\frac{6}{r^4}$ αντιστοιχεί σε απωστικές. Η απόσταση ισορροπίας είναι η r_o ενώ η ενέργεια του δεσμού (ενέργεια αλληλεπίδρασης) η U_o.

β) Στην απόσταση ισορροπίας η συνολική δύναμη είναι μηδέν οπότε:

$$F_{tot}(r_o) = 0 = \frac{30}{r_o^4} - \frac{24}{r_o^5} \Rightarrow r_o = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} = 0.8(nm),$$

Επίσης η ενέργεια δεσμού μπορεί να υπολογιστεί από την:

$$U_o = U(r_o) = -\frac{10}{r_o^3} + \frac{6}{r_o^4} = -\frac{625}{128} \simeq -4.9\ (eV)$$

4.3 Έστω ότι η συνάρτηση που περιγράφει την δύναμη που ασκείται σε ένα δεσμό δίνεται από την σχέση $F(r) = -\frac{2}{r^5} + \frac{8}{r^3}$ σε μονάδες *eV/nm* όταν η ακτίνα *r* εκφράζεται σε *nm*. Ποια θα είναι η απόσταση ισορροπίας ανάμεσα στα δύο ιόντα και ποια η ελάχιστη ενέργεια που χρειάζεται για να «σπάσει ο δεσμός»; Είναι ο δεσμός ιοντικός;

Λύση:

Στην απόσταση ισορροπίας η συνολική δύναμη είναι μηδέν:

$$F_{tot}(r_o) \equiv 0 = -\frac{2}{r_o^5} + \frac{8}{r_o^3} \Rightarrow r_o^2 = \frac{2}{8} \Rightarrow r_o = \frac{1}{2}(nm),$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί από την:

$$U(r) = \int F(r)dr = \frac{1}{4}\frac{2}{r^4} - \frac{1}{2}\frac{8}{r^2} + C = \frac{1}{2\cdot r^4} - \frac{4}{r^2} + C$$

Όπου *C* σταθερά. Θεωρώντας ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι μηδέν όταν r→∞ τότε *C*=0. Τελικά για την δυναμική ενέργεια του συστήματος παίρνουμε: $U(r) = \frac{1}{2\cdot r^4} - \frac{4}{r^2}$

Έτσι η δυναμική ενέργεια στην θέση ισορροπίας r_o γίνεται:

$$U(r_o) = \frac{1}{2\cdot r_o^4} - \frac{4}{r_o^2} = \frac{1}{2\frac{1}{2^4}} - \frac{4}{\frac{1}{2^2}} = 8 - 16 = -8\ (eV)$$

Επομένως η ελάχιστη ενέργεια που χρειάζεται για να «σπάσει» ο δεσμός είναι 8 *eV*. Επίσης ο δεσμός δεν είναι ιοντικός γιατί ο όρος που περιγράφει τις ελκτικές δυνάμεις ($\frac{8}{r^3}$) δεν είναι ανάλογος του $\frac{1}{r^2}$

4.4 Έστω ότι η δυναμική ενέργεια ενός δεσμού δίνεται από την σχέση $U(r) = \frac{A}{r^4} - \frac{B}{r^2}$ σε μονάδες *eV* όταν η ακτίνα *r* εκφράζεται σε *nm*. Υπολογίστε τις τιμές των σταθερών *A, B* αν η απόσταση ισορροπίας είναι 1 *nm* και η ελάχιστη ενέργεια που χρειάζεται για να «σπάσει ο δεσμός» είναι 5 eV. *(δικαιολογήστε την απάντηση σας)*

Λύση:

Η συνολική δύναμη δίνεται από την σχέση: $F_{tot}(r) \equiv \frac{dU(r)}{dr} = \frac{-4 \cdot A}{r^5} + \frac{2 \cdot B}{r^3}$,

Στην απόσταση ισορροπίας r_o = 1 *nm* η συνολική δύναμη είναι μηδέν:

$$F_{tot}(r_o) \equiv 0 = \frac{-4 \cdot A}{r_o^5} + 2\frac{3 \cdot B}{r_o^3} \Rightarrow -4 \cdot A + 2 \cdot B = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}B, \qquad \text{(E2.1)}$$

Η ελάχιστη ενέργεια U_o = 5 eV που απαιτείται για να «σπάσει» ο δεσμός μπορεί να υπολογιστεί από:

$$U(r_o) \equiv -U_o = \frac{A}{r_o^4} - \frac{B}{r_o^2} \Rightarrow A - B = -5 \qquad \text{(E2.2)}$$

Συνδυάζοντας τις (E2.1), (E2.2) παίρνουμε: $\left.\begin{matrix} A = \frac{1}{2}B \\ A - B = -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} A = 5 \\ B = 10 \end{matrix}} \Rightarrow U(r) = \frac{5}{r^4} - \frac{10}{r^2}$

Άλυτες Ασκήσεις

4.4 Έστω ότι η δυναμική ενέργεια ενός ιοντικού δεσμού δίνεται από την σχέση $U(r) = -\frac{14}{r^5} + \frac{10}{r^7}$ σε μονάδες *eV* όταν η ακτίνα *r* εκφράζεται σε *nm*. Ποια θα είναι η απόσταση ισορροπίας ανάμεσα στα δύο ιόντα και ποια η αντίστοιχη ενέργεια αλληλεπίδρασης;

Απάντηση: $r_0 = 1nm,\ U(r_o) = U_o = -4eV$

4.5 Έστω ότι η δυναμική ενέργεια ενός δεσμού δίνεται από την σχέση $U(r) = -\frac{4}{r} + \frac{1}{8\cdot r^4}$ σε μονάδες *eV* όταν η ακτίνα *r* εκφράζεται σε *nm*. Ποια θα είναι η απόσταση ισορροπίας ανάμεσα στα δύο ιόντα και ποια η αντίστοιχη ενέργεια αλληλεπίδρασης; Είναι ο δεσμός ιοντικός; *(δικαιολογήστε την απάντηση σας)*

Απάντηση: $r_0 = \frac{1}{2}nm,\ U(r_o) = U_o = -6eV$, ο δεσμός είναι ιοντικός

4.6 Έστω ότι η δυναμική ενέργεια ενός δεσμού δίνεται από την σχέση $U(r) = -\frac{5}{r^2} + \frac{2.5}{r^4}$ σε μονάδες *eV* όταν η ακτίνα *r* εκφράζεται σε *nm*. Ποια θα είναι η απόσταση ισορροπίας ανάμεσα στα δύο ιόντα και ποια η αντίστοιχη ενέργεια αλληλεπίδρασης; Είναι ο δεσμός ιοντικός; *(δικαιολογήστε την απάντηση σας)*

Απάντηση: $r_0 = 1nm,\ U(r_o) = U_o = -2.5eV$, ο δεσμός δεν είναι ιοντικός

4.7 Έστω ότι η συνάρτηση που περιγράφει την δύναμη που ασκείται σε ένα δεσμό δίνεται από την σχέση $F(r) = -\frac{1}{4\cdot r^5} + \frac{2}{r^2}$ σε μονάδες *eV/nm* όταν η ακτίνα *r* εκφράζεται σε *nm*. Ποια θα είναι η απόσταση ισορροπίας ανάμεσα στα δύο ιόντα και ποια η ελάχιστη ενέργεια που χρειάζεται για να «σπάσει ο δεσμός»; Είναι ο δεσμός ιοντικός;

Απάντηση: $r_0 = \frac{1}{2}nm,\ U(r_o) = U_o = -3eV \Rightarrow$ χρειάζονται τουλάχιστον 3 *eV* για να «σπάσει» ο δεσμός. Ο δεσμός είναι ιοντικός

Τέλος Ασκήσεων Ενότητας 4

Ενότητα 5:Δομή

5.1 Να υπολογιστεί ο αριθμός ατομικής πλήρωσης (APF) για την FCC κυβική δομή

Λύση:

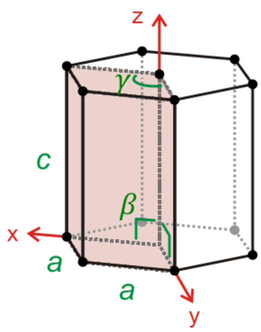
$$APF_{FCC} \equiv \frac{n \cdot V_{atom}}{V_{FCC}} = \frac{(\frac{1}{8}\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 6)\cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{(2\sqrt{2}R)^3} = \frac{4\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{2^4\sqrt{2}R^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74$$

5.2 Να υπολογιστεί ο αριθμός ατομικής πλήρωσης (APF) για την BCC κυβική δομή

Λύση:

$$APF_{BCC} \equiv \frac{n \cdot V_{atom}}{V_{BCC}} = \frac{(\frac{1}{8}\cdot 8 + 1)\cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{(\frac{4}{\sqrt{3}}R)^3} = \frac{2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{2^6}{3\sqrt{3}}R^3} = \frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{8} \approx 0.68$$

5.3 Να υπολογιστεί ο αριθμός ατομικής πλήρωσης (APF) για την HCP κυβική δομή



Εμβαδό ρόμβου πλευράς a: $S_{romb} = \sin(60^o)\cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

Όγκος κυψελίδας: $\left.\begin{aligned} V_{HPC} &= 3S_{romb}c \\ c &= \sqrt{\frac{8}{3}}a \\ a &= 2R \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_{HPC} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\sqrt{\frac{8}{3}}a = \frac{3\sqrt{8}}{2}(2R)^3$

$$APF_{HCP} \equiv \frac{n \cdot V_{atom}}{V_{HCP}} = \frac{(\frac{1}{6}\cdot 12 + \frac{1}{2}\cdot 2 + 3)\cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{3\sqrt{8}}{2}(2R)^3} =$$

$$= \frac{6\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{3\sqrt{8}\cdot 4R^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = APF_{FCC} \approx 0.74$$

5.4 Πόσα άτομα ανήκουν αντίστοιχα σε μια FCC, BCC, και HCP κυψελίδα; *(δικαιολογήστε την απάντηση σας)*

Λύση:

(FCC): $8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 1 + 3 = 4$

(BCC): $8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 1 + 1 = 2$

(HCP): $12 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 2 + 1 + 3 = 6$

5.5 Ο χαλκός $_{29}Cu$ έχει κρυσταλλική δομή FCC, ατομικό βάρος 63.5 gr/mole και ατομική ακτίνα 0.128 nm. Ποια περιμένετε να είναι η πυκνότητα του; (δίνεται: N_A=6.022 10^{23} atoms/mole), (*Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας)*

Λύση

A= 63.5 gr/mole, R = 128 nm = 0.128 10^{-7} cm

Εφόσον η κρυσταλλική δομή του χαλκού είναι FCC τότε η πυκνότητα θα δίνεται απ' την σχέση:

$$\rho_{FCC} = 4\, atoms \cdot \frac{A}{N_A} \cdot \frac{1}{(2\sqrt{2}\,R)^3} \approx 8.9 \;\; gr/cm^3$$

5.6 Ο χαλκός $_{29}Cu$ έχει πυκνότητα 8.94 gr/cm^3, ατομικό βάρος 63.5 gr/mole και ατομική ακτίνα 0.128 nm. Προσδιορίστε αν έχει κρυσταλλική δομή BCC ή FCC. (δίνεται: N_A=6.022 10^{23} atoms/mole), (*Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας)*

Λύση

A= 63.5 gr/mole, R = 128 nm = 0.128 10^{-7} cm

Αν η κρυσταλλική δομή είναι BCC τότε η πυκνότητα θα δίνεται απ' την σχέση:

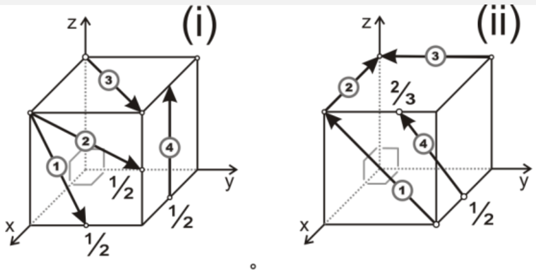
$$\rho_{BCC} = 2\, atoms \cdot \frac{A}{N_A} \cdot \frac{1}{(\frac{4}{\sqrt{3}}R)^3} \approx 8.2 \;\; gr/cm^3$$

Αν η κρυσταλλική δομή είναι FCC τότε η πυκνότητα θα δίνεται απ' την σχέση:

$$\rho_{FCC} = 4\, atoms \cdot \frac{A}{N_A} \cdot \frac{1}{(2\sqrt{2}\,R)^3} \approx 8.9 \;\; gr/cm^3$$

Η τιμή ρ_{FCC} είναι αρκετά κοντά στην πραγματική οπότε περιμένουμε ο Cu να έχει κρυσταλλική δομή **FCC**.

5.7 Να προσδιορίσετε τις κρυσταλλογραφικές διευθύνσεις σε καθ’ ένα από τα παρακάτω σχήματα



Λύση:

(i)

(1) $[0\ \frac{1}{2}\ \bar{1}] \Rightarrow [0\ 1\ \bar{2}]$ (2) $[0\ 1\ \overline{\tfrac{1}{2}}] \Rightarrow [0\ 2\ \bar{1}]$

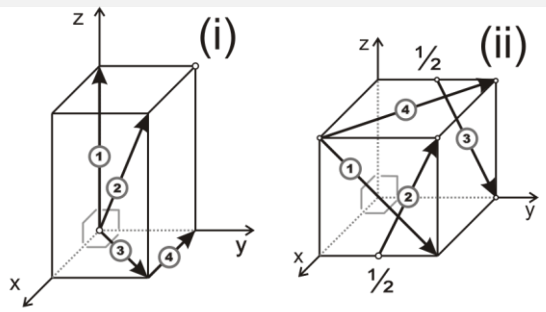
(3) $[1\ 1\ 0]$ (4) $[0\ 0\ 1]$

(ii)

(1) $[0\ \bar{1}\ 1]$ (2) $[\bar{1}\ 0\ 0]$

(3) $[0\ \bar{1}\ 0]$ (4) $[\frac{1}{2}\ \overline{\tfrac{1}{3}}\ 1] \Rightarrow [3\ \bar{2}\ 6]$

5.8 Να προσδιορίσετε τις κρυσταλλογραφικές διευθύνσεις σε καθ’ ένα από τα παρακάτω σχήματα



Λύση:

(i)

(1) $[0\ 0\ 1]$ (2) $[1\ 1\ 1]$

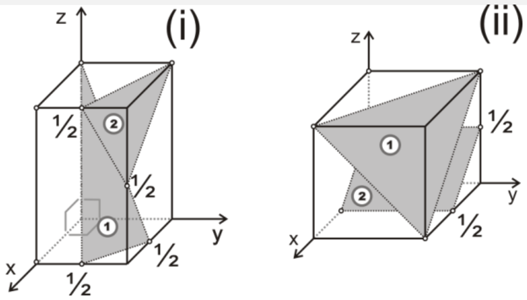
(3) $[1\ 1\ 0]$ (4) $[\bar{1}\ 0\ 0]$

(ii)

(1) $[0\ 1\ \bar{1}]$ (2) $[0\ \frac{1}{2}\ 1] \Rightarrow [0\ 1\ 2]$

(3) $[0\ \frac{1}{2}\ \bar{1}] \Rightarrow [0\ 1\ \bar{2}]$ (4) $[\bar{1}\ 1\ 0]$

5.9 Να προσδιορίσετε τους δείκτες Miller των κρυσταλλογραφικών επιπέδων σε καθ’ ένα από τα παρακάτω σχήματα



Λύση:

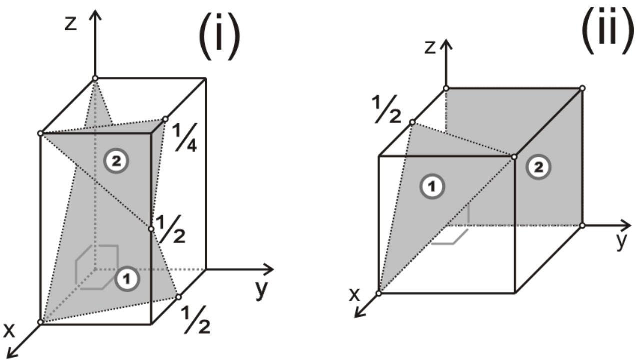
(i)

(1) $\dfrac{x \quad y \quad z}{\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \quad 1} \Rightarrow (\frac{2}{3} \;\; \frac{2}{3} \;\; 1) \Leftrightarrow (2 \;\; 2 \;\; 3)$ (2) $\dfrac{x \quad y \quad z}{\bar{1} \quad \frac{\bar{1}}{2} \quad \frac{\bar{1}}{2}} \Rightarrow (\bar{1} \;\; \bar{2} \;\; \bar{2}) \Leftrightarrow (1 \;\; 2 \;\; 2)$

(ii)

(1) $\dfrac{x \quad y \quad z}{\bar{1} \quad \bar{1} \quad \bar{1}} \Rightarrow (\bar{1} \;\; \bar{1} \;\; \bar{1}) \Leftrightarrow (1 \;\; 1 \;\; 1)$ (2) $\dfrac{x \quad y \quad z}{\frac{1}{2} \quad \infty \quad \frac{1}{2}} \Rightarrow (2 \;\; 0 \;\; 2) \Leftrightarrow (1 \;\; 0 \;\; 1)$

5.10 Να προσδιορίσετε τους δείκτες Miller των κρυσταλλογραφικών επιπέδων σε καθ’ ένα από τα παρακάτω σχήματα



Λύση:

(i)

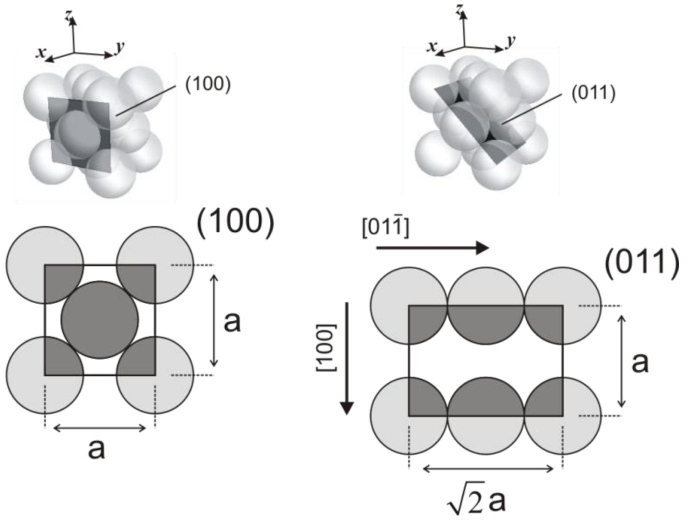
(1) $\dfrac{x \quad y \quad z}{1 \quad 2 \quad 1} \Rightarrow (1 \;\; \frac{1}{2} \;\; 1) \Leftrightarrow (2 \;\; 1 \;\; 2)$ (2) $\dfrac{x \quad y \quad z}{\frac{\bar{1}}{4} \quad \bar{1} \quad \frac{\bar{1}}{2}} \Rightarrow (\bar{4} \;\; \bar{1} \;\; \bar{2}) \Leftrightarrow (4 \;\; 1 \;\; 2)$

(ii)

(1) $\dfrac{x \quad y \quad z}{\frac{\bar{1}}{2} \quad 1 \quad \bar{1}} \Rightarrow (\bar{2} \;\; 1 \;\; \bar{1}) \Leftrightarrow (2 \;\; \bar{1} \;\; 1)$ (2) $\dfrac{x \quad y \quad z}{1 \quad \infty \quad \infty} \Rightarrow (1 \;\; 0 \;\; 0)$

5.11 Υπολογίστε την επιφανειακή πυκνότητα (PD) για τα επίπεδα (100) και (011) για μία κυβική FCC κυψελίδα.

Λύση:



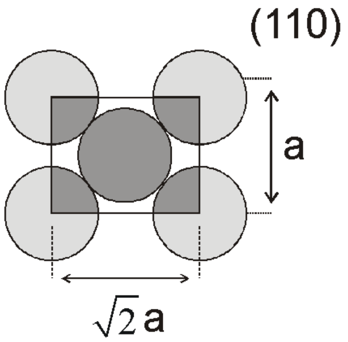
$$a = 2\sqrt{2}R$$

$$PD_{(100)} = \frac{4(\frac{1}{4}\pi R^2) + \pi R^2}{(2\sqrt{2}R)^2} = 0.785,$$

$$PD_{(011)} = \frac{4(\frac{1}{4}\pi R^2) + 2(\frac{1}{2}\pi R^2)}{(2\sqrt{2}R)\cdot\sqrt{2}(2\sqrt{2}R)} = 0.555$$

5.12 Υπολογίστε την επιφανειακή πυκνότητα PD για το επίπεδο (110) για μία κυβική BCC κυψελίδα

Λύση:



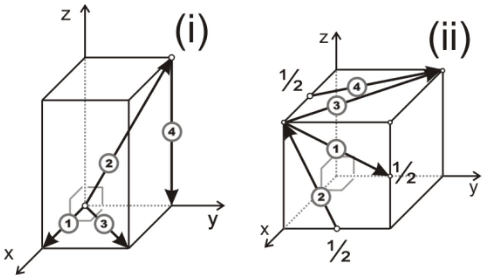
$$a = \frac{4}{\sqrt{3}}R, \quad PD_{(110)} = \frac{4(\frac{1}{4}\pi R^2) + \pi R^2}{(\frac{4}{\sqrt{3}}R)\cdot\sqrt{2}(\frac{4}{\sqrt{3}}R)} = \frac{2\pi R^2}{\frac{16\sqrt{2}}{3}R^2} \approx 0.833,$$

Άλυτες Ασκήσεις

5.13 Ο χρυσός $_{79}Au$ έχει κρυσταλλική δομή FCC, ατομικό βάρος 196.97 gr/mole και ατομική ακτίνα 0.144 nm. Ποια περιμένετε να είναι η πυκνότητα του; (δίνεται: N_A=6.022 10^{23} atoms/mole), (*Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας)*

Απάντηση: $\rho_{FCC} \approx 19.36\ gr/cm^3$

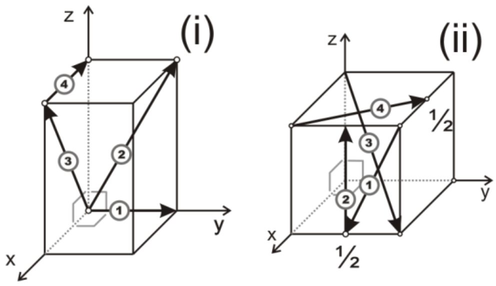
5.14 Να προσδιορίσετε τις κρυσταλλογραφικές διευθύνσεις σε καθ' ένα από τα παρακάτω σχήματα



Απάντηση: (i) (1) $[1\ 0\ 0]$, (2) $[0\ 1\ 1]$, (3) $[1\ 1\ 0]$, (4) $[0\ 0\ \bar{1}]$,

(ii) (1), $[0\ 2\ \bar{1}]$, (2) $[0\ \bar{1}\ 2]$, (3) $[\bar{1}\ 1\ 0]$, (4) $[\bar{1}\ 2\ 0]$

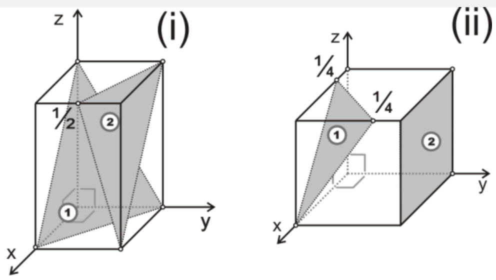
5.15 Να προσδιορίσετε τις κρυσταλλογραφικές διευθύνσεις σε καθ' ένα από τα παρακάτω σχήματα



Απάντηση: (i) (1) $[0\ 1\ 0]$, (2) $[0\ 1\ 1]$, (3) $[1\ 0\ 1]$, (4) $[\bar{1}\ 0\ 0]$,

(ii) (1) $[0\ \bar{1}\ \bar{2}]$, (2) $[0\ 0\ 1]$, (3) $[1\ 1\ \bar{1}]$, (4) $[\bar{1}\ 2\ 0]$

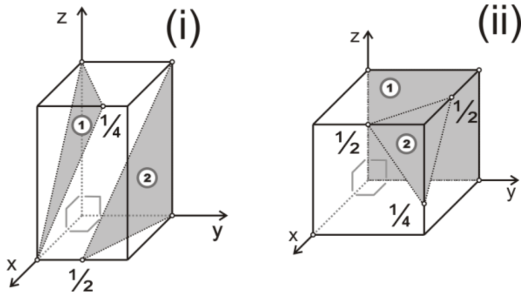
5.16 Να προσδιορίσετε τους δείκτες Miller των κρυσταλλογραφικών επιπέδων σε καθ' ένα από τα παρακάτω σχήματα



Απάντηση: (i) (1) $(1\ 1\ 1)$, (2) $(1\ 2\ 1)$

(ii) (1) $(4\ \bar{4}\ 3)$, (2) $(0\ 1\ 0)$

5.17 Να προσδιορίσετε τους δείκτες Miller των κρυσταλλογραφικών επιπέδων σε καθ' ένα από τα παρακάτω σχήματα



Απάντηση: (i) (1) $(3\ 4\ 3)$, (2) $(1\ 2\ 0)$

(ii) (1) $(1\ 0\ 0)$, (2) $(3\ 3\ 2)$

Τέλος Ασκήσεων Ενότητας 5

Ενότητα 6: Μηχανικές Ιδιότητες

6.1 Ένα αντικείμενο μάζας 500 kg πρόκειται να «κρεμαστεί» για τις ανάγκες μιας έκθεσης χρησιμοποιώντας ένα χαλύβδινο σύρμα. **α)** Ποια θα πρέπει να είναι η ελάχιστη διάμετρος του σύρματος θεωρώντας τον παράγοντα ασφαλείας ίσο με 2; **β)** Ποια θα είναι σε αυτή την περίπτωση η διαμήκης και ποια η εγκάρσια παραμόρφωση του σύρματος;
(*δίνονται ο συντελεστής Poisson ν = 0.3, το μέτρο ελαστικότητας E = 200 GPa και η αντοχή διαρροής του χάλυβα* σ_y *= 1000 MPa , επιτάχυνση βαρύτητας g = 10 m/sec*^{2})

Λύση:

α) Με παράγοντα ασφαλείας N = 2 η τάση εργασίας στο σύρμα θα είναι:

$$\sigma_w = \frac{\sigma_y}{N} = \frac{1000\,MPa}{2} = 500\,MPa$$

Η δύναμη εφελκυσμού που ασκείται στο σύρμα διαμέτρου D και διατομής S θα είναι

$$F = m \cdot g = 500\,Kg \cdot 10\,m/\sec^2 = 5000\,N$$

Όμως

$$\sigma_w = \frac{F}{S} \Rightarrow S = \frac{F}{\sigma_w} = \frac{5000N}{500 \cdot 10^6\,Pa} = 1 \cdot 10^{-5}\,m^2$$

Οπότε τελικά η ελάχιστη διάμετρος υπολογίζεται από την:

$$S = \pi \frac{D^2}{4} \Rightarrow D = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \simeq 0.0036\,m = 3.6\,mm$$

β) Γνωρίζουμε ότι η διαμήκης παραμόρφωση ε_z συνδέεται με την τάση μέσω της σταθεράς ελαστικότητας Ε:

$$\sigma_w = E\varepsilon_z \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\sigma_w}{E} = \frac{500MPa}{200\,GPa} = 2.5 10^{-3}$$

Ενώ η εγκάρσια παραμόρφωση συνδέεται με την διαμήκη μέσω του συντελεστή Poisson:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} \Rightarrow \varepsilon_y = -\nu\,\varepsilon_z = -0.3 \cdot 2.5 \cdot 10^{-3} = -7.5 \cdot 10^{-4}$$

6.2 Ο χειριστής ενός γερανού επιχειρεί να σηκώσει κοντέινερ βάρους 10 τόνων με τη χρήση χαλύβδινου σύρματος διαμέτρου 10 mm. **α)** Θα τα καταφέρει; Σε κάθε περίπτωση, τι θα συμβεί στο σύρμα; **β)** Ποια είναι η ελάχιστη διάμετρος του σύρματος για να μπορεί ο γερανός να σηκώσει τέτοια φορτία με παράγοντα ασφαλείας ίσο με 4; Ποια θα είναι σε αυτή την περίπτωση η διαμήκης και ποια η εγκάρσια παραμόρφωση του σύρματος;

(*δίνονται ο συντελεστής Poisson ν = 0.3, το μέτρο ελαστικότητας Ε = 200 GPa και η αντοχή διαρροής του χάλυβα σ_y = 1210 MPa, αντοχή σε εφελκυσμό σ_M= 1380 MPa, επιτάχυνση βαρύτητας g ~10 m/s^2*)

Λύση:

α) Η δύναμη εφελκυσμού που ασκείται στο σύρμα είναι $F = m \cdot g = 10^4\, Kg \cdot 10\, m/\sec^2 = 10^5\, N$, ενώ η τάση εργασίας στο σύρμα διαμέτρου D_o και διατομής $S_o = \pi \dfrac{D_o^{\,2}}{4} \cong 3.14 \cdot \dfrac{(10 \cdot 10^{-3})^2}{4} m^2 \cong 78.5 \cdot 10^{-6} m^2$ θα είναι: $\sigma_w^o = \dfrac{F}{S_o} \cong \dfrac{10^5}{78.5 \cdot 10^{-6}} \dfrac{N}{m^2} \cong 1274\, MPa$.

Η τιμή αυτή είναι $\sigma_y < \sigma_w < \sigma_M$ επομένως ο χειριστής θα τα καταφέρει αλλά το σύρμα θα παραμορφωθεί πλαστικά και θα πρέπει να αντικατασταθεί.

β) Με παράγοντα ασφαλείας Ν=4 η τάση εργασίας στο σύρμα θα είναι:

$$\sigma_w = \frac{\sigma_y}{N} = \frac{1210\, MPa}{4} = 302.5\, MPa \,.$$

Γνωρίζοντας ότι η δύναμη εφελκυσμού που θα ασκείται στο σύρμα είναι $F = 10^5\, N$ μπορούμε να υπολογίσουμε την επιθυμητή διατομή: $\sigma_w = \dfrac{F}{S} \Rightarrow S = \dfrac{F}{\sigma_w} = \dfrac{10^5\, N}{302.5\, MPa} = 330.6 \cdot 10^{-6} m^2$.

Τελικά η ελάχιστη διάμετρος υπολογίζεται από την: $S = \pi \dfrac{D^2}{4} \Rightarrow D = 2\sqrt{\dfrac{S}{\pi}} \simeq 20.5\, mm$.

Γνωρίζουμε ότι η διαμήκης παραμόρφωση ε_z συνδέεται με την τάση μέσω της σταθεράς ελαστικότητας Ε: $\sigma_w = E\varepsilon_z \Rightarrow \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_w}{E} = \dfrac{302.5 MPa}{200\, GPa} \cong 1.5 10^{-3}$, ενώ η εγκάρσια παραμόρφωση συνδέεται με την διαμήκη μέσω του συντελεστή Poisson:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} \Rightarrow \varepsilon_y = -\nu\, \varepsilon_z = -0.3 \cdot 1.5 \cdot 10^{-3} = -4.5 \cdot 10^{-4}$$

6.3 Κατασκευαστής χαλύβδινων συρμάτων ισχυρίζεται ότι ένα σύρμα διαμέτρου 8 mm μπορεί να αντέξει εφελκυσμό φορτίου 3000 Kg. Μετά από μετρήσεις εφελκυσμού καταλήγετε στα ακόλουθα μεγέθη για τα σύρματα: μέτρο ελαστικότητας E = 200 GPa, αντοχή διαρροής σ_y = 1200 MPa και αντοχή σε εφελκυσμό σ_M = 1400 MPa. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του κατασκευαστή; Αν ναι, ποιος είναι ο παράγοντας ασφαλείας σε αυτή την περίπτωση; (επιτάχυνση βαρύτητας g =10 m/s^2)

Λύση:

Για να είναι σωστός ο ισχυρισμός του κατασκευαστή θα πρέπει η τάση λειτουργίας σ_w να είναι μικρότερη από την αντοχή διαρροής σ_y του χάλυβα.

Η δύναμη εφελκυσμού που ασκείται στο σύρμα διαμέτρου D και διατομής S θα είναι

$$F = m \cdot g = 3 \cdot 10^3\, Kg \cdot 10\, m/\sec^2 = 3 \cdot 10^4\, N$$

Έτσι η τάση λειτουργίας θα είναι:

$$\sigma_w = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi(\frac{D}{2})^2} = \frac{3 \cdot 10^4\, N}{\pi(\frac{8 \cdot 10^{-3} m}{2})^2} = \frac{1}{\pi}\frac{30}{16}10^9\,\frac{N}{m^2} \cong 596.83\, MPa$$

Εφόσον η τάση λειτουργίας σ_w είναι μικρότερη από την αντοχή διαρροής σ_y ο ισχυρισμός του κατασκευαστή είναι σωστός!

Ο παράγοντας ασφαλείας σε αυτή την περίπτωση θα είναι:

$$N = \frac{\sigma_y}{\sigma_w} = \frac{1200\, MPa}{596.83\, MPa} \cong 2$$

6.4 Χρειάζεται να επιλέξετε το οικονομικότερο σύρμα για να «κρεμαστεί» φορτίο 5000 Kg. Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα επιλέξτε το κατάλληλο σύρμα για την εφαρμογή και δικαιολογήστε την επιλογή σας. Ποια θα είναι η διαμήκης παραμόρφωση σε αυτή την περίπτωση; Προσοχή! Ο παράγοντας ασφαλείας δεν θα πρέπει να είναι μικρότερος του 2. *(επιτάχυνση βαρύτητας g =10 m/s^2)*

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Διάμετρος (mm)	**6**	**8**	**10**	**12**	**6**	**8**	**10**	**12**
Μέτρο ελαστικότητας E (GPa)	**200**	**200**	**200**	**200**	**150**	**150**	**150**	**150**
Αντοχή Διαρροής σ_y (MPa)	**1400**	**1400**	**1400**	**1400**	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**
Κόστος Euro/m	**0.12**	**0.48**	**1.1**	**1.9**	**0.1**	**0.4**	**0.9**	**1.6**

Λύση:

Η δύναμη εφελκυσμού που θα ασκείται στο σύρμα θα είναι:

$$F = m \cdot g = 5000 \cdot Kg \cdot 10\, m/\sec^2 = 5 \cdot 10^4\, N$$

Παρατηρούμε ότι τα σύρματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες με βάση το μέτρο ελαστικότητας και την αντοχή διαρροής . Θεωρώντας ότι ο παράγοντας ασφαλείας θα είναι οριακά N=2 προκύπτει για την τάση εργασίας:

$$\sigma_w = \frac{\sigma_y}{N} = \begin{cases} \frac{1400}{2}\,\text{MPa} = 700\,\text{MPa} \;\; (\sigma_y = 1400\,\text{MPa}) \\ \frac{1000}{2}\,\text{MPa} = 500\,\text{MPa} \;\; (\sigma_y = 1000\,\text{MPa}) \end{cases}$$

Γνωρίζοντας της τάση εργασίας μπορούμε να υπολογίσουμε την ελάχιστη διάμετρο σύρματος με την οποία μπορούμε να εργαστούμε με παράγοντα ασφάλειας τουλάχιστον 2:

$$\sigma_w \equiv \frac{F}{\pi(\frac{D}{2})^2} \Rightarrow \quad D \geq 2\sqrt{\frac{F}{\pi\,\sigma_w}} = \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 10^4\, N}{\pi \cdot 700 \cdot 10^6\, N/m^2}} = \frac{1}{10\sqrt{35\pi}}\, m \cong 9.5\, mm \;\; (\sigma_y = 1400\,\text{MPa}) \\ 2 \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 10^4\, N}{\pi \cdot 500 \cdot 10^6\, N/m^2}} = \frac{1}{50\sqrt{\pi}}\, m \cong 11.3\, mm \;\; (\sigma_y = 1000\,\text{MPa}) \end{cases}$$

Με βάση τα παραπάνω τις προδιαγραφές τις ικανοποιούν μόνο τα σύρματα 3, 4, και 8. Από αυτά το οικονομικότερο είναι το σύρμα 3 με χαρακτηριστικά: $(D = 10\; mm,\; \sigma_y = 1400\,\text{MPa},\; E = 200\;\text{GPa},\; 1.1\,\text{Euro/m})$. Με αυτή την επιλογή ο παράγοντας ασφαλείας είναι τελικά:

$$\sigma_w^{real} = \frac{F}{\pi(\frac{D}{2})^2} = \frac{5 \cdot 10^4\, N}{\pi(\frac{10}{2} \cdot 10^{-3} m)^2} \cong 636.6\,\text{MPa} \Rightarrow \text{N}^{real} = \frac{\sigma_y}{\sigma_w^{real}} = \frac{1400\,\text{MPa}}{636.6\,\text{MPa}} \cong 2.2$$

Σε αυτή την περίπτωση η διαμήκης παραμόρφωση ε_z μπορεί να υπολογιστεί μέσω της σταθεράς ελαστικότητας Ε και της τάσης εργασίας:

$$\sigma_w = E\varepsilon_z \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\sigma_w}{E} = \frac{700\;\text{MPa}}{200\,GPa} \cong 3.510^{-3}$$

6.5 Χαλύβδινα σύρματα διαμέτρου 12 *mm* πρόκειται να χρησιμοποιηθούν σε μια κρεμαστή γέφυρα. Τα σύρματα έχουν σχεδιαστεί να λειτουργούν με φορτίο μάζας 3000 kg/σύρμα σε θερμοκρασία 20 ^oC. Ποια θα πρέπει να είναι η ελάχιστη θερμοκρασία στην οποία τα σύρματα θα λειτουργούν χωρίς ο παράγοντας ασφαλείας να γίνει μικρότερος από 3;

(*δίνονται ο συντελεστής Poisson ν = 0.3, το μέτρο ελαστικότητας E = 200 GPa, η αντοχή διαρροής* σ_y *= 1000 MPa και ο συντελεστής θερμικής διαστολής του χάλυβα* $\alpha = 13\ 10^{-6}\ {}^oC^{-1}$, *η επιτάχυνση βαρύτητας g = 10* m/sec^2)

Λύση[1]:

Αφού τα σύρματα είναι πακτωμένα θα ασκείται πάνω τους μια εφελκυστική τάση:

$$\sigma_o = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{\frac{\pi}{4} D^2} = \frac{3000\,kg \cdot 10\,m/s^2}{\pi\, 36 \cdot 10^{-6}\,m} \cong 265.2\,MPa$$

όπου D η διάμετρος του σύρματος. Έτσι σε θερμοκρασία 20 ^oC η κατασκευή λειτουργεί με παράγοντα ασφαλείας $N = \frac{\sigma_y}{\sigma_o} = \frac{1000\,MPa}{265.2\,MPa} \cong 3.77$. Η μείωση της θερμοκρασίας, λόγω της επαγόμενης συστολής αυξάνει την εφελκυστική τάση. Η επιπλέον εφελκυστική τάση μπορεί να υπολογιστεί από την:

$$\sigma_{th} = -E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

όπου ΔT η μεταβολή της θερμοκρασίας. Έτσι η συνολική εφελκυστική τάση στα σύρματα θα είναι:

$$\sigma_{tot} = \sigma_o - E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο παράγοντας ασφαλείας σε κάθε περίπτωση θα δίνεται από την σχέση:

$$N = \frac{\sigma_y}{\sigma_{tot}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_o - E \cdot \alpha \cdot \Delta T}$$

Ο παράγοντας ασφαλείας δεν μπορεί να είναι μικρότερος του 3 οπότε:

$$N = \frac{\sigma_y}{\sigma_{tot}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_o - E \cdot \alpha \cdot \Delta T} \geq 3 \Rightarrow \sigma_y \geq 3(\sigma_o - E \cdot \alpha \cdot \Delta T)$$

$$\Rightarrow \Delta T \geq -\frac{\sigma_y/3 - \sigma_o}{E \cdot \alpha} = -\frac{1000/3\,MPa - 265.2\,MPa}{200\,GPa \cdot 13 \cdot 10^{-6}\ {}^oC^{-1}} \cong -26.2\ {}^oC$$

Επομένως η ελάχιστη θερμοκρασία στην οποία ο παράγοντας ασφαλείας μειώνεται οριακά στο 3 είναι 20 ^oC-26.2 ^oC= -6.2 ^oC.

[1] *Για να λυθεί αυτή η άσκηση απαιτούνται γνώσεις Θερμικών ιδιοτήτων (ενότητα 6)*

Άλυτες Ασκήσεις

6.6 Ένας γερανός πρόκειται να μεταφέρει κοντέινερ μάζας $20 \cdot 10^3$ Kg με την βοήθεια ενός χαλύβδινου σύρματος. Ποια θα είναι η ελάχιστη διάμετρος του σύρματος έτσι ώστε το φορτίο να μεταφερθεί τουλάχιστον μία φορά χωρίς το σύρμα να σπάσει και ποια αν ο παράγοντας ασφαλείας είναι ίσος με 2; (*δίνονται: το μέτρο ελαστικότητας E = 200 GPa , η αντοχή διαρροής* σ_y *= 250 MPa και η αντοχή σε εφελκυσμό* σ_M *= 400 MPa του χάλυβα, g ~ 10 m/sec*^{2})

Απάντηση: για τουλάχιστον1 φορά χωρίς να σπάσει $D \cong 25.2\,mm$, $D_{N=2} \cong 45.1\,mm$

6.7 Κατασκευαστής χαλύβδινων συρμάτων ισχυρίζεται ότι ένα σύρμα διαμέτρου 1 mm, που θα χρησιμοποιηθεί σε ρομποτικό βραχίονα σε διαστημική αποστολή στον Άρη, μπορεί να αντέξει εφελκυσμό φορτίου 120 Kg. Μετά από μετρήσεις εφελκυσμού καταλήγετε στα ακόλουθα μεγέθη για τα σύρματα: μέτρο ελαστικότητας *E* = 200 GPa, αντοχή διαρροής σ_y = 1200 MPa και αντοχή σε εφελκυσμό σ_M = 1400 MPa. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του κατασκευαστή; Αν ναι, ποιος είναι ο παράγοντας ασφαλείας σε αυτή την περίπτωση; *(επιτάχυνση βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη Άρη g* $\cong$ *4 m/s*^{2}*, επιτάχυνση βαρύτητας στην επιφάνεια της Γής g* $\cong$ *10 m/s*^{2}*)*

Απάντηση: ο ισχυρισμός του κατασκευαστή είναι σωστός!, $N \cong 1.96$

6.8 Χαλύβδινα σύρματα διαμέτρου 5 mm πρόκειται να χρησιμοποιηθούν σε μια κρεμαστή γέφυρα. Τα σύρματα έχουν σχεδιαστεί να λειτουργούν με φορτίο μάζας 500 kg/σύρμα σε θερμοκρασία 20 ^oC. Ποια θα πρέπει να είναι η ελάχιστη θερμοκρασία στην οποία τα σύρματα θα λειτουργούν χωρίς ο παράγοντας ασφαλείας να γίνει μικρότερος από 2; (*δίνονται ο συντελεστής Poisson ν = 0.3, το μέτρο ελαστικότητας E = 200 GPa, η αντοχή διαρροής* σ_y *= 1000 MPa και ο συντελεστής θερμικής διαστολής του χάλυβα α=13* $10^{-6}\ ^oC^{-1}$*, η επιτάχυνση βαρύτητας g = 10 m/sec*^{2})

Απάντηση[2]**:** Η ελάχιστη θερμοκρασία είναι -19.2 ^oC

Τέλος Ασκήσεων Ενότητας 6

[2] *Για να λυθεί αυτή η άσκηση απαιτούνται γνώσεις Θερμικών ιδιοτήτων (ενότητα 6)*

Ενότητα 7: Θερμικές Ιδιότητες

7.1 Πόση θερμική ενέργεια θα χρειαστεί να προσφέρουμε για να θερμάνουμε ένα κύβο διαστάσεων 10x10x10 cm^3 κατασκευασμένο από μπετόν κατά 40 ^oC; (*ειδική θερμοχωρητικότητα μπετόν:* $c_p = 0.88\ J\ g^{-1}\ K^{-1}$, *πυκνότητα μπετόν:* $\rho = 2\ g/cm^3$)

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι: $c_p = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$, όπου m η μάζα του θερμαινόμενου σώματος, ΔQ η προσφερόμενη θερμότητα, ΔΤ η μεταβολή της θερμοκρασίας. Η συνολική μάζα του κύβου θα είναι $m = \rho \cdot V = 2\frac{g}{cm^3}10^3 cm^3 = 2000\,g$. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική θερμική ενέργεια που θα χρειαστεί:

$$\Delta Q = m \cdot c_p \cdot \Delta T = 2000\,g \cdot 0.88\frac{J}{g \cdot K} \cdot 40K = 70.4\,kJ$$

7.2 Πόσο χρόνο θα χρειαστούμε για να θερμάνουμε ένα κύβο διαστάσεων 10x10x10 cm^3 κατασκευασμένο από μπετόν κατά 10 ^oC αν χρησιμοποιούμε μια θερμαντική αντίσταση ισχύος P_R =1 kW; (*ειδική θερμοχωρητικότητα μπετόν:* $c_p = 0.88\ J\ g^{-1}\ K^{-1}$, *πυκνότητα μπετόν:* $\rho = 2\ g/cm^3$)

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι: $c_p = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$, όπου m η μάζα του θερμαινόμενου σώματος, ΔQ η προσφερόμενη θερμότητα, ΔΤ η μεταβολή της θερμοκρασίας. Η συνολική μάζα του κύβου θα είναι $m = \rho \cdot V = 2\frac{g}{cm^3}10^3 cm^3 = 2000\,g$. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική θερμική ενέργεια που θα χρειαστεί:

$$\Delta Q = m \cdot c_p \cdot \Delta T = 2000\,g \cdot 0.88\frac{J}{g \cdot K} \cdot 10K = 17.6\,kJ$$

Έτσι ο ελάχιστος χρόνος (αγνοώντας πιθανές απώλειες κ.τ.λ.) που θα χρειαστεί για να θερμάνουμε την μάζα του μπετόν θα είναι:

$$t = \frac{\Delta Q}{P_R} = \frac{17.6\,kJ}{1kJ/\mathrm{s}} = 17.6\mathrm{s}$$

7.3 Έστω δύο δεξαμενές θερμότητας με θερμοκρασία T_1 = 25 ^oC, T_2 = 10 ^oC αντίστοιχα που χωρίζονται από υλικό πάχους *L=10 cm*. **α)** Πώς θα μεταβάλλεται η θερμοκρασία στο υλικό; **β)** Για ποια τιμή θερμικής αγωγιμότητας έχουμε ροή θερμότητας $Q \leq 10\ W/m^2$

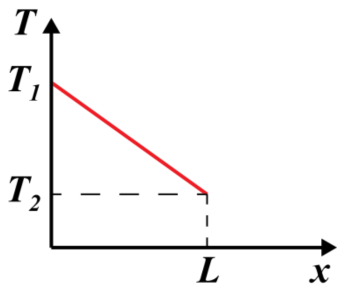
Λύση:

α) Εφαρμόζοντας την εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας σε μία διάσταση καταλήγουμε σε μια αναλυτική σχέση για την θερμοκρασία:

$$Q = -k \cdot \frac{dT(x)}{dx} \Rightarrow \frac{dT(x)}{dx} = -\frac{Q}{k} = const \Rightarrow T(x) = -\int \frac{Q}{k} dx = -\frac{Q}{k} x + C$$

όπου k η θερμική αγωγιμότητα (W m^{-1} K^{-1}) του υλικού, Q είναι ή ροή θερμότητας (W/m^2) και C είναι μία σταθερά. Στην παραπάνω αναλυτική σχέση η ροή θερμότητας Q και η σταθερά C είναι άγνωστοι και θα υπολογιστούν αξιοποιώντας τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Έτσι στα όρια του υλικού (x = 0 και x = L) γνωρίζουμε ότι $T(0) = T_1,\ T(L) = T_2$ οπότε συνολικά έχουμε:

$$\left.\begin{array}{c} T(0) = C = T_1 \\ T(L) = -\frac{Q}{k} L + T_1 = T_2 \Rightarrow Q = \frac{T_1 - T_2}{L} k \end{array}\right\} \Rightarrow T(x) = T_1 - \left(T_1 - T_2\right) \cdot \frac{x}{L}$$



Δηλαδή η θερμοκρασία είναι γραμμική συνάρτηση της απόστασης και δεν εξαρτάται από το υλικό που έχουμε χρησιμοποιήσει. (βλ. διπλανό σχήμα)

β) Η ροή θερμότητας *:Q* μπορεί να υπολογιστεί, όπως δείξαμε παραπάνω από την σχέση $Q = \frac{T_1 - T_2}{L} k$. Έτσι στην περίπτωση που εξετάζουμε:

$$Q \le 10 W/m^2 \Rightarrow \frac{T_1 - T_2}{L} k \le 10 W/m^2 \Rightarrow k \le \frac{L}{T_1 - T_2} \cdot 10 W/m^2$$

Εφαρμόζοντας για τιμές T_1 = 25 ^{o}C, T_2 = 10 ^{o}C, και πάχος L = 10 cm παίρνουμε:

$$k \le \frac{10\,cm}{(25-10)\,K} \cdot 10 W/m^2 \cong 0.067 \frac{W}{m \cdot K}$$

7.4 Έστω δύο δεξαμενές θερμότητας με θερμοκρασίες T_1, T_2 που χωρίζονται από γυάλινο τοίχωμα πάχους L=*3 cm* ενώ η ροή θερμότητας είναι Q = 500 *W/m^2*. Ποια είναι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ των δύο δεξαμενών;

(θερμική αγωγιμότητα γυαλιού: k = 0.93 W m^{-1} K^{-1})

Λύση:

Εφαρμόζοντας την εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας σε μία διάσταση:

$$Q = -k \cdot \frac{dT(x)}{dx} \Rightarrow dT(x) = -\frac{\overbrace{Q}^{const}}{k} dx \Rightarrow \quad \Delta T \equiv T_1 - T_2 = T(0) - T(L) = -\int_L^0 \frac{Q}{k} dx = \frac{Q}{k} L$$

όπου k η θερμική αγωγιμότητα (W m^{-1} K^{-1}) του υλικού, Q είναι ή ροή θερμότητας (W/m^2) και C είναι μία σταθερά. Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ των δεξαμενών:

$$\Delta T = \frac{Q}{k} L = \frac{500 W/m^2}{0.93 W/(m \cdot K)} 3 \cdot 10^{-2} m \cong 16.1 K$$

Άλυτες Ασκήσεις

7.5 Έστω δύο δεξαμενές θερμότητας με θερμοκρασία T_1 = 80 ^oC, T_2 = 20 ^oC αντίστοιχα που χωρίζονται από υλικό πάχους *L=10 cm*. **α)** Πώς θα μεταβάλλεται η θερμοκρασία στο υλικό; **β)** Για ποια τιμή θερμικής αγωγιμότητας έχουμε ροή θερμότητας $Q \geq 100\ W/m^2$

Απάντηση: α) $T(x) = T_1 - \left(T_1 - T_2\right) \cdot \dfrac{x}{L}$, β) $k \geq 0.167 \dfrac{W}{m \cdot K}$

7.6 Πόση θερμική ενέργεια θα χρειαστεί να προσφέρουμε για να θερμάνουμε ένα κύβο διαστάσεων 20x20x20 cm^3 κατασκευασμένο από μπετόν κατά 40 ^oC; (*ειδική θερμοχωρητικότητα μπετόν:* $c_p = 0.88\ J\ g^{-1}\ K^{-1}$, *πυκνότητα μπετόν:* $\rho = 2\ g/cm^3$)

Απάντηση: $\Delta Q = 563.2\,kJ$

7.7 Έστω δύο δεξαμενές θερμότητας με θερμοκρασίες T_1, T_2 που χωρίζονται από χάλκινο τοίχωμα πάχους *L= 5 cm* ενώ η ροή θερμότητας είναι Q = 2 kW/m^2. Ποια είναι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ των δύο δεξαμενών;

(*θερμική αγωγιμότητα χαλκού:* $k = 50\ W\ m^{-1}\ K^{-1}$)

Απάντηση: $\Delta T \cong 2\,K$

Τέλος Ασκήσεων Ενότητας 7

Ενότητα 8: Ηλεκτρικές Ιδιότητες

Υποδείξεις

Η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα (σ) σε ένα υλικό εξαρτάται από την πυκνότητα και την ευκινησία των φορέων, καθώς και το φορτίο τους. Σε ένα ημιαγωγό υπάρχουν δύο είδη φορέων, τα ηλεκτρόνια και οι οπές. Η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα δίνεται σε αυτή την περίπτωση από το άθροισμα της αγωγιμότητας λόγω των ηλεκτρονίων και τον οπών την σχέση: $\sigma = n\,\mu_e\,|e| + p\,\mu_h\,|e|$, όπου n η πυκνότητα των ηλεκτρονίων, p η πυκνότητα των οπών, μ_e η ευκινησία των ηλεκτρονίων, μ_h η ευκινησία των οπών (γενικά $\mu_h < \mu_e$) και $|e|$ το φορτίο του ηλεκτρονίου.

Σε ένα ενδογενή ημιαγωγό η πυκνότητες των ηλεκτρονίων και των οπών είναι ίσες οπότε ισχύει:

Ενδογενής ημιαγωγός: $n = p \;\;\Rightarrow\;\; \sigma = n(\mu_e + \mu_h)|e|$

Όταν εισάγουμε προσμίξεις τύπου n αυξάνουμε δραματικά την πυκνότητα των ηλεκτρονίων έτσι ώστε $n \gg p$ οπότε η ηλεκτρική αγωγιμότητα καθορίζεται ουσιαστικά από τα ηλεκτρόνια

Ημιαγωγός με προσμίξεις τύπου n: $n \gg p \;\;\Rightarrow\;\; \sigma \cong n\,\mu_e\,|e|$

Όταν εισάγουμε προσμίξεις τύπου p αυξάνουμε δραματικά την πυκνότητα των οπών έτσι ώστε $p \gg n$ οπότε η ηλεκτρική αγωγιμότητα καθορίζεται ουσιαστικά από τις οπές

Ημιαγωγός με προσμίξεις τύπου p: $p \gg n \;\;\Rightarrow\;\; \sigma \cong p\,\mu_h\,|e|$

Ασκήσεις

8.1 Έστω εξωγενής ημιαγωγός τύπου p με συγκέντρωση οπών $p = 5\cdot 10^{18}\ m^{-3}$. Ποια είναι η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα του υλικού αυτού αν υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου 300 V/m η μέση ταχύτητα μετατόπισης των ηλεκτρονίων είναι 15 *m/s*; *(φορτίο του ηλεκτρονίου* $|e| \cong 1.6\cdot 10^{-19}\ C$ *)*

Λύση:

Η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα σ σε ένα εξωγενή ημιαγωγό τύπου *n* δίνεται από την σχέση:

$$\sigma = p\,\mu_h\,|e|$$

όπου μ_e η ευκινησία των ηλεκτρονίων και |e| το φορτίο του ηλεκτρονίου. Η ευκινησία των ηλεκτρονίων μπορεί να υπολογιστεί από την μέση ταχύτητα μετατόπισης τους μέσω της σχέσης:

$$\langle \upsilon \rangle = \mu_h \cdot E \Rightarrow \mu_h = \frac{\langle \upsilon \rangle}{E} = \frac{15\,m/s}{300\,V/m} = 0.05\frac{m^2}{V\cdot s}$$

Αντικαθιστώντας μπορούμε να υπολογίσουμε την ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα:

$$\sigma = p\,\mu_h\,|e| = 5\cdot 10^{18} m^{-3}\cdot 0.05\frac{m^2}{V\cdot s}\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\,C = 0.04\,m^{-1}\cdot Ohm^{-1}$$

$$(m^{-3}\cdot\frac{m^2}{V\cdot s}\cdot C = \frac{1}{m}\frac{C}{V\cdot s} = \frac{1}{m}\frac{A}{V} = \frac{1}{m\cdot Ohm})$$

8.2 Έστω εξωγενής ημιαγωγός τύπου *n* με συγκέντρωση ηλεκτρονίων *n* = $2.23\cdot10^{12}$ cm^{-3}. Ποια είναι η μέση ταχύτητα μετατόπισης των ηλεκτρονίων αν η πυκνότητα ρεύματος είναι 20 mA/cm^2; *(ειδική αντίσταση του ημιαγωγού:* $\rho = 20\,Ohm\cdot m$*, ευκινησία των ηλεκτρονίων:* $\mu_e = 0.14\,m^2\cdot V^{-1}\cdot s^{-1}$*,φορτίο του ηλεκτρονίου* $|e| \cong 1.6\cdot10^{-19}\,C$ *)*

Λύση:

Η μέση ταχύτητα μετατόπισης συνδέεται άμεσα με την ευκινησία των οπών μέσω της σχέσης:

$$\langle\upsilon\rangle = \mu_e\cdot E$$

όπου *E* η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Μπορούμε να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου από τον νόμο του Ohm:

$$J = \sigma\cdot E \Rightarrow E = \frac{J}{\sigma}$$

όπου J υ πυκνότητα ρεύματος και σ η ειδική ηλεκτρική αντίσταση ($\sigma \equiv \rho^{-1}$). Έτσι τελικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\langle\upsilon\rangle = \mu_e\cdot E = \mu_e\frac{J}{\sigma} = \mu_e\cdot\rho\cdot J =$$

$$= 0.14\,(m^2\cdot V^{-1}\cdot s^{-1})\cdot 10\,(Ohm\cdot m)\cdot 20\cdot10^{-3}(A\cdot10^4 m^{-2}) = 560\,m/s$$

$$(\frac{m^2}{V\cdot s}\cdot Ohm\cdot m\frac{A}{m^2} = \frac{m}{s}\frac{Ohm\cdot A}{V} = \frac{m}{s})$$

8.3 Έστω εξωγενής ημιαγωγός τύπου n. Ποια είναι η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων αν υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου 500 V/m η πυκνότητα ρεύματος είναι 30 mA/cm^2; *(φορτίο του ηλεκτρονίου* $|e| \cong 1.6\cdot10^{-19}\,C$ *, ευκινησία των ηλεκτρονίων:* $\mu_e = 0.15\,m^2\cdot V^{-1}\cdot s^{-1}$*)*

Λύση:

Μπορούμε να υπολογίσουμε την ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα σ από τον νόμο του Ohm:

$$J = \sigma\cdot E \Rightarrow \sigma = \frac{J}{E}$$

όπου *E* η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και *J* η πυκνότητα ρεύματος. Όμως η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα σ σε ένα εξωγενή ημιαγωγό τύπου *n* δίνεται και από την σχέση:

$$\sigma = n\,\mu_e|e|$$

Όπου |e| το φορτίο του ηλεκτρονίου και *n*, μ_e η συγκέντρωση και η ευκινησία των ηλεκτρονίων αντίστοιχα. Λύνοντας ως προς την συγκέντρωση *n*:

$$n = \frac{\sigma}{\mu_e|e|} = \frac{J}{\mu_e|e|E} = \frac{30\cdot10^{-3}\,Acm^{-2}}{(0.15\,m^2\cdot V^{-1}\cdot s^{-1})\cdot(1.6\cdot10^{-19}\,C)\cdot(500V/m)} = 2.5\cdot10^{13}cm^{-3}$$

Άλυτες Ασκήσεις

8.4 Έστω εξωγενής ημιαγωγός τύπου n με συγκέντρωση ηλεκτρονίων $n = 2\cdot 10^{19}$ m^{-3}. Ποια είναι η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα του υλικού αυτού αν, υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου 400 V/m, η μέση ταχύτητα μετατόπισης των ηλεκτρονίων είναι 50 *m/s*; *(φορτίο του ηλεκτρονίου* $|e| \cong 1.6\cdot 10^{-19}\, C$ *)*

Απάντηση: $\sigma = 0.4\, m^{-1}\cdot Ohm^{-1}$

8.5 Έστω εξωγενής ημιαγωγός τύπου p με συγκέντρωση οπών $p = 3\cdot 10^{13}$ cm^{-3}. Ποια είναι η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα του υλικού αυτού αν, υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου 100 V/m, η μέση ταχύτητα μετατόπισης των ηλεκτρονίων είναι 20 *m/s*; *(φορτίο του ηλεκτρονίου* $|e| \cong 1.6\cdot 10^{-19}\, C$ *)*

Απάντηση: $\sigma = 0.96\, m^{-1}\cdot Ohm^{-1}$

8.6 Έστω εξωγενής ημιαγωγός τύπου *p* με συγκέντρωση οπών $p = 1.25\cdot 10^{19}$ m^{-3}. Ποια είναι η μέση ταχύτητα μετατόπισης των οπών αν η πυκνότητα ρεύματος είναι 100 mA/cm^2; *(ειδική αντίσταση του ημιαγωγού:* $\rho = 10\, Ohm\cdot m$, *ευκινησία των οπών:* $\mu_h = 0.05\, m^2\cdot V^{-1}\cdot s^{-1}$ *,φορτίο του ηλεκτρονίου* $|e| \cong 1.6\cdot 10^{-19}\, C$ *)*

Απάντηση: $\langle \upsilon \rangle = 500\, m/s$

8.7 Έστω εξωγενής ημιαγωγός τύπου *p*. Ποια είναι η μέση ταχύτητα μετατόπισης των οπών αν η πυκνότητα ρεύματος είναι 20 mA/cm^2; *(ειδική αντίσταση του ημιαγωγού:* $\rho = 25\, Ohm\cdot m$, *ευκινησία των οπών:* $\mu_h = 0.04\, m^2\cdot V^{-1}\cdot s^{-1}$ *,φορτίο του ηλεκτρονίου* $|e| \cong 1.6\cdot 10^{-19}\, C$ *)*

Απάντηση: $\langle \upsilon \rangle = 200\, m/s$

8.8 Έστω εξωγενής ημιαγωγός τύπου p. Ποια είναι η συγκέντρωση των οπών αν υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου 200 V/m η πυκνότητα ρεύματος είναι 5 mA/cm^2; *(φορτίο του ηλεκτρονίου* $|e| \cong 1.6\cdot 10^{-19}\, C$ *, ευκινησία των οπών:* $\mu_h = 0.05\, m^2\cdot V^{-1}\cdot s^{-1}$ *)*

Απάντηση: $p = 3.125\cdot 10^{13} cm^{-3}$

Τέλος Ασκήσεων Ενότητας 8